2025 四川省赛部分题目讲评

isaunoya

Hangzhou Dianzi University

目录

A. 最小乘积

C. 最优时间

I. 本质不同后缀

L. abc

附录

目录

A. 最小乘积

C. 最优时间

I. 本质不同后缀

L. abc

附录

A. 最小乘积：题意

2025 四川省赛 A。有向边有两个正权 a_e, b_e，路径代价为

$$\left(\sum_{e\in P} a_e\right)\left(\sum_{e\in P} b_e\right).$$

$n \le 300$，$m \le 1000$，$1 \le a_e, b_e \le 200$。多组数据，$\sum n \le 1000$、$\sum m \le 2000$，保证 1 能到达 n。

输出最优路径的两个权值和；乘积相同时，优先输出较小的 a 权和。

A. 最小乘积：题意

2025 四川省赛 A。有向边有两个正权 a_e, b_e，路径代价为

$$\left(\sum_{e\in P} a_e\right)\left(\sum_{e\in P} b_e\right).$$

$n \le 300$，$m \le 1000$，$1 \le a_e, b_e \le 200$。多组数据，$\sum n \le 1000$、$\sum m \le 2000$，保证 1 能到达 n。

输出最优路径的两个权值和；乘积相同时，优先输出较小的 a 权和。

固定其中一个和，另一个和就成为可加的代价。

A：为什么不能只保存当前最小乘积

前缀路径的两个和记为 (A, B)，接上边 (a, b) 后，乘积为

$$(A + a)(B + b) = AB + aB + bA + ab.$$

后续不仅依赖 AB，还分别依赖 A, B。当前乘积更小的前缀，接上相同边以后不一定更优。

但在 A 相同的条件下，较小的 B 始终占优。因此保留“到达顶点与 A 权和”即可进行可靠的状态合并。

A：按第一种权值分层

令 $f_{s,u}$ 为到达 u、a 权和恰为 s 时最小的 b 权和。

初始 $f_{0,1}=0$，其他状态为无穷。对边 (u,v,a,b)，转移

$$f_{s+a,v} \leftarrow \min\bigl(f_{s+a,v}, f_{s,u}+b\bigr).$$

因为 $a>0$，所有转移严格增加层数。按 s 递增扫描即可；同一层内部没有依赖，不需要再运行最短路。

A：层数的上界

若一条路径含环，删去环会同时减小两个正权之和，乘积也会变小。因此最优路径可以取为简单路径，最多包含 $n-1$ 条边。

令 $A=\max_e a_e$，只需计算到

$$S=(n-1)A.$$

扫描所有有限的 $f_{s,n}$，按二元组 $\left(sf_{s,n},s\right)$ 取最小，保存对应的两个和。题目要求输出这两个和，不是它们的乘积。

A：正确性与复杂度

所有转移只生成实际路径；任何最优简单路径也落在上述层数范围内。

对同一 (s, u)，丢掉较大的第二种权值和不会影响任意后续延伸。因此 DP 枚举到最优解，并且不会产生比真实最优解更小的答案。

完整表空间为 $O(Sn)$；转移共 $O(Sm)$，加上初始化为 $O(S(n+m))$。乘积比较使用 64 位整数。

$n = 1$ 时空路径给出 $(0, 0)$。不可达状态不做加法，避免无穷哨兵溢出。

选讲：循环层数组的空间优化

目录

A. 最小乘积

C. 最优时间

I. 本质不同后缀

L. abc

附录

C. 最优时间：题意

2025 四川省赛 C。状态为 x，每秒选择保持不变，或等概率变成 x 的约数及不超过 N 的倍数之一；随后状态减一。

给定 N 与 Q 次初始状态询问，求到达零的最小期望时间。$N, Q \leq 10^5$，允许 10^{-6} 的绝对或相对误差。

C. 最优时间：题意

2025 四川省赛 C。状态为 x，每秒选择保持不变，或等概率变成 x 的约数及不超过 N 的倍数之一；随后状态减一。

给定 N 与 Q 次初始状态询问，求到达零的最小期望时间。$N, Q \leq 10^5$，允许 10^{-6} 的绝对或相对误差。

随机一步可能跳到更大的状态，按状态大小递推会形成循环依赖。

C：Bellman 方程与同步迭代

令 $S(x)$ 为随机动作可选的集合，$f(0)=0$。每个动作先花一秒，再进入下一状态：

$$f(x)=1+\min\left(f(x-1),\frac{1}{|S(x)|}\sum_{y\in S(x)}f(y-1)\right).$$

将右侧记为算子 T。从一直等待的策略 $h_0(x)=x$ 出发，同步计算 $h_{t+1}=Th_t$。

h_t 表示前 t 步允许最优决策、之后一直等待的代价。由 T 保序且 $Th_0\le h_0$，有

$$f\le h_{t+1}\le h_t.$$

C：为什么极限就是最优值

任意策略在接下来 N 步中，若始终等待，则必然结束；否则看第一次随机操作，它选到 1 的概率至少为 $\frac{1}{N}$，随后立即到达零。

因此每 N 步至少有 $\frac{1}{N}$ 的概率结束。反复分段可知任意策略的结束时间尾部趋于零，且期望有限。

把最优策略截断在第 t 步，之后改为等待；残余代价至多为 N 乘尚未结束的概率，随 t 趋于零。

故 h_t 收敛到 f。仅有“单调、有下界”还不足以说明极限是所需最优值。

C：残差给出的答案区间

对旧数组 h 完整计算 $g = Th$，令 $\delta = \max_{x>0}(h(x) - g(x))$。任意动作都满足 $h(x) \le 1 + E[h(X')] + \delta$；沿最优策略累加到零，得到

$$h(x) \le (1+\delta) f(x), \quad \frac{h(x)}{1+\delta} \le f(x) \le h(x).$$

因此检查所有状态的区间宽度

$$\frac{h(x)\delta}{1+\delta} \le \varepsilon.$$

若通过，输出这份旧数组 h；否则交换为 g 继续。浮点计算取 $\varepsilon = 10^{-8}$ 留出余量。残差是事后精度证书，还需证明它会在有限轮内通过。

C：每轮汇总约数与倍数

对每个 x，先把自身 x 计入 $S(x)$。再枚举严格整除关系 $d < y$、$d \mid y$：y 加入 $S(d)$，d 加入 $S(y)$，分别累加旧值 $h(y-1)$ 与 $h(d-1)$。

每个成员只计一次。关系总数为 $O(N \log N)$，集合大小可以预处理；据此在同一轮重新计算等待与随机两个动作。

一轮时间 $O(N \log N)$、空间 $O(N)$。预处理后每个询问查表；状态零始终为零，$N = 1$ 时初始策略已最优。

同步更新与停止条件的完整顺序

C：势函数控制迭代轮数

沿最优策略，在非零状态有 $E[f(X')] = f(x) - 1$。若 $f \le H$，则 $f(x) - 1 \le \left(1 - \frac{1}{H}\right) f(x)$，从而吸收时间 τ 满足

$$\Pr(\tau > k) \le H\left(1 - \frac{1}{H}\right)^k.$$

若某一轮已知 $f \le h_t \le H$，先按最优策略走 k 步、再改用 h_t 对应的策略，可得

$$0 \le h_{t+k} - f \le H^2\left(1 - \frac{1}{H}\right)^k.$$

残差不超过当前误差，答案区间宽度因而至多 $H^3\left(1 - \frac{1}{H}\right)^k$。

几何尾界与残差界的推导 · 一般规模的纯解析轮数界

C：本题范围内的轮数保证

对所有 $N \le 10^5$，用向上取整的整数算子完整验证，可得 $h_{40}(x) < 10$。取 $H = 10$，第 300 次更新检查旧数组 h_{299}，其区间宽度至多

$$10^3 \left(\frac{9}{10}\right)^{259} < 10^{-8}.$$

因此在精确算术下，最多 300 次更新即可通过残差判据。总时间 $O(KN \log N + Q)$，本题范围内 $K \le 300$；空间 $O(N)$。

这个常数依赖完整有限范围的整数验证，浮点实现仍检查残差并保留精度余量。纯解析分析另给出 $O\left(\sqrt{N} \log\left(\frac{N}{\varepsilon}\right)\right)$ 轮上界。

整数上界算子与可复验结论

目录

A. 最小乘积

C. 最优时间

I. 本质不同后缀

L. abc

附录

I. 本质不同后缀：题意

2025 四川省赛 I。给若干小写字母串，总长度不超过 3×10^5，求所有非空后缀去重后的个数。

I. 本质不同后缀：题意

2025 四川省赛 I。给若干小写字母串，总长度不超过 3×10^5，求所有非空后缀去重后的个数。

反转是双射，不改变两个字符串是否相等。原串的后缀，恰好变成反转串的前缀。

问题因此等价于：将所有反转串插入 Trie，统计不同的非空前缀。

I：每个非根节点就是一个答案

Trie 中每个非根节点对应根到它的唯一路径，即一个不同的非空前缀。每个插入串的每个前缀，也都会经过某个节点。

两者一一对应，所以答案等于 Trie 节点数减一。

不只统计标记为字符串结尾的节点；一个前缀即使不是任何完整输入串，也对应一个合法后缀。

重复插入不会创建新路径，自动完成去重；空串只对应根，因此需要排除根。

I：线性实现

从每个字符串末尾向前读字符，直接沿 Trie 转移，不必实际复制反串。缺少转移时创建节点，并将所有出边初始化为空。

设输入总长度为 L，最多创建 L 个非根节点。使用从零开始的根编号时，容量至少为 $L+1$；若另留零作为空指针，还要额外预留哨兵位置。

固定 26 个小写字母，时间与空间均为 $O(L)$。最后输出创建的非根节点总数。

目录

A. 最小乘积

C. 最优时间

I. 本质不同后缀

L. abc

附录

L. abc：题意

2025 四川省赛 L。给定仅含 a、b、c 的字符串，长度 $n \leq 2 \times 10^5$。

每个非空子串的价值为：出现最多的字符次数，减去出现最少的**已出现字符**次数。求所有子串价值之和。

L. abc：题意

2025 四川省赛 L。给定仅含 a、b、c 的字符串，长度 $n \le 2 \times 10^5$。

每个非空子串的价值为：出现最多的字符次数，减去出现最少的**已出现字符**次数。求所有子串价值之和。

未出现字符的零次数不参与最小值。先允许零参与计算，再分别扣除两种字符、单种字符的多算量。

L：三个计数转成三组差值

设一个子串的计数为 a, b, c。将三者排序为 $x \le y \le z$，有

$$|a-b| + |a-c| + |b-c| = 2(z-x).$$

所以允许零次数参与时，价值为

$$\frac{|a-b| + |a-c| + |b-c|}{2}.$$

分别求三个绝对差在所有子串上的总和，最后除以二即可。三个数之间的大小关系不需要分类维护。

L：绝对差转成前缀和对

以 $a-b$ 为例，把 a 记为 1、b 记为 -1、c 记为 0，得到前缀和 $p_0,\ldots,p_n$。

子串 $[i,j)$ 的计数差为 p_j-p_i，需要计算

$$D=\sum_{0\le i<j\le n}\left|p_j-p_i\right|.$$

每对不同前缀下标对应唯一非空子串。绝对值对称，因此可以把所有前缀值排序，而不用保留原下标顺序。

L：排序后的贡献

排序后有 $v_0 \le \ldots \le v_n$。扫描到 v_j 时，它和之前所有前缀产生的贡献为

$$\sum_{i<j}(v_j - v_i) = jv_j - \sum_{i<j} v_i.$$

维护之前的数量与数值和，即可线性完成扫描。整个过程连同排序为 $O(n \log n)$。

相同前缀值的贡献是零，不需要去重；删掉重复值会丢失它们与其他前缀组成的合法下标对。

L：两种字符的多算量

若子串只包含两种字符，正计数为 a, b。第一步因第三种计数为零而算成 $\max(a, b)$，实际应为 $\max(a, b) - \min(a, b)$。

所以应扣除 $\min(a, b)$。固定缺失字符，例如 c，将原串切成不含 c 的极长段。

每个不含 c 的子串唯一属于其中一段。段内可利用

$$\min(a, b) = \frac{(a + b) - |a - b|}{2}.$$

L：一个二字符段的扣除量

长度为 m 的段，其所有非空子串长度之和为

$$F(m)=\sum_{k=1}^{m}k(m-k+1)=m(m+1)\frac{m+2}{6}.$$

设该段按前缀和方法算出的绝对差总和为 D，需要扣除

$$\frac{F(m)-D}{2}.$$

对三个缺失字符分别切段并累计。单色子串虽然可能落入两种切分，但其 $\min(a,b)=0$，不会重复扣除非零贡献。

L：最后处理单色子串

单色子串的真实价值为零，第一步却把其长度计入；第二步的最小计数为零，尚未扣掉它。

枚举每个相同字符的极长连续段，长度为 m 时，再减去 $F(m)$。

这就完成互斥的三类核对：三种字符直接正确；两种字符扣掉较小正计数；一种字符扣掉整段长度贡献。

长度为一以及整个串只有一种字符的情况，都自然得到零。

L：用值域桶替代排序

一个长度 m 的段，前缀和的最大值与最小值之差至多 m。每段从零重新求前缀，将桶下标整体加 m，或减去该段最小前缀值；统计各值次数，按值递增扫描。

设当前值为 x，出现 c 次；之前已有 C 个前缀，数值总和为 S，则本组贡献为

$$c(xC - S).$$

随后更新 $C \leftarrow C + c$、$S \leftarrow S + cx$。组内值相同，互相贡献为零。

每次只初始化当前段长度对应的桶，不能对每个短段清空整个长度 n 的数组。

L：合并各阶段与总复杂度

1. 三组计数差的全串绝对差和相加，除以二。
2. 对每个缺失字符的极长段，扣除 $\frac{F(m)-D}{2}$。
3. 对所有单色极长段，扣除 $F(m)$。

每一种切分中，所有段长度之和不超过 n。因此排序实现共 $O(n \log n)$；值域桶实现共 $O(n)$，空间都是 $O(n)$。

总答案为 $O(n^3)$，所有累计值与 $F(m)$ 都使用 64 位整数；乘法先提升类型，再进行整数除法。

目录

A. 最小乘积

C. 最优时间

I. 本质不同后缀

L. abc

附录

证明与实现索引

- C：最优值势函数与几何收敛
- C：覆盖所有允许规模的整数上界
- C：不依赖有限验证的解析轮数界
- C：同步更新与残差的实现顺序
- A：循环层数组

返回 C 的轮数结论

C：迭代轮数与吸收时间

残差能说明某次停止时足够精确，却不能单独说明什么时候会停止。下面补充轮数上界。

先取最优平稳策略，记吸收时间为 τ、第 k 步状态为 X_k。若对所有状态都有 $f(x) \le H$，则在非零状态

$$E\left[f\left(X_{k+1}\right) \texttt{ mid } X_k\right] = f(X_k) - 1.$$

每步花费一秒，最优策略后续仍然最优，因此可以用 f 本身作为势函数。

C：势函数给出几何尾界

由于 $f(x) \le H$，有

$$f(x) - 1 \le \left(1 - \frac{1}{H}\right) f(x).$$

状态零的势函数为零。迭代条件期望得到

$$E[f(X_k)] \le H \left(1 - \frac{1}{H}\right)^k.$$

非零状态至少还要花一秒，所以 $f(x) \ge 1$。于是

$$\Pr(\tau > k) \le E[f(X_k)] \le H \left(1 - \frac{1}{H}\right)^k.$$

C：从尾界到迭代误差

假设某一轮 h_t 已满足 $f \le h_t \le H$。先执行最优策略 k 步，再按 h_t 对应的策略继续，是 h_{t+k} 可选的方案。

与始终执行最优策略相比，只有第 k 步还未结束时才可能增加代价，且增加量至多 H。因此

$$0 \le h_{t+k} - f \le H^2 \left(1 - \frac{1}{H}\right)^k.$$

同时，$h - Th \le h - f$，停止区间宽度至多

$$H^3 \left(1 - \frac{1}{H}\right)^k.$$

返回 C 的收敛速度

C：统一覆盖所有允许的 N

要取得较小的 H，对 $N_* = 10^5$ 定义一个更保守的算子。随机动作的平均值，取所有允许上界 M 中最差的一个：

$$A_h(x) = \max_{x \le M \le N_*} \frac{1}{|S_M(x)|} \sum_{y \in S_M(x)} h(y-1),$$

$$(Rh)(x) = 1 + \min(h(x-1), A_h(x)).$$

它逐项不小于任意具体规模的 Bellman 算子。由相同初值 $h_0(x) = x$ 出发，R 的迭代因此同时支配所有 $N \le N_*$ 的迭代。

C：把上界计算变成整数验证

取尺度 $s = 10^6$，初始 $u_0(x) = sx$。每个平均数都向上取整，再执行

$$u_{t+1}(x) = s + \min\Big(u_t(x-1), \Big\lceil A_{u_t}(x) \Big\rceil\Big).$$

只用整数加法、除法和比较；向上取整的方向保证

$$h_t^N(x) \le \frac{u_t(x)}{s} \quad (x \le N \le N_*).$$

枚举 M 不需要二重循环：约数部分固定，随 M 变化的只是倍数列表的前缀。逐个加入倍数，并维护最大平均值即可，一轮仍为 $O(N_* \log N_*)$。

C：有限范围证书给出的数值

对全部 $1 \le x \le 10^5$ 执行上述整数迭代，40 轮后逐项检查得到

$$\max_x u_{40}(x) = 9788341 < 10^7.$$

因此对**所有** $N \le 10^5$ 都有 $h_{40}^N(x) < 10$，可以在误差界中取 $H = 10$。

这一步是覆盖完整有限范围的整数验证，不是随机抽样或浮点实验。验证程序给出完整算子、取整方向和断言，可单独重新运行。

返回 C 的轮数结论

C：一个纯解析的较松上界

取阈值 B：状态不超过 B 时一直等待；否则一直随机，直到进入小状态或结束。若 $B \geq N$，直接使用等待策略。

令 $D_B = \max_{x>B} |S(x)|$。每次高状态操作直接选到一的概率至少为 $\frac{1}{D_B}$，所以该策略期望至多 $B + D_B$。

记 $\mathrm{tau}(x)$ 为约数个数。取 $B = \left\lceil \sqrt{N} \right\rceil$，利用 $\mathrm{tau}(x) \leq 2\sqrt{N}$，可得

$$\max f \leq B + 2\sqrt{N} + \frac{N}{B} \leq 4\sqrt{N} + 1.$$

这是对最优值 f 的上界，初始数组 $h_0(x) = x$ 尚不满足这个较小上界；还需要区分初始代价和势函数的范围。

C：一般上界如何用于初始数组

令 $H = 4\sqrt{N} + 1$。势函数尾界仍给出 $\Pr(\tau > k) \le H\left(1 - \frac{1}{H}\right)^k$，但截断后改为等待的代价至多为 N，因此

$$0 \le h_k - f \le NH\left(1 - \frac{1}{H}\right)^k.$$

又因为 $h_k \le N$、残差不超过当前误差，停止区间宽度至多

$$N^2 H\left(1 - \frac{1}{H}\right)^k.$$

于是 $O\left(\sqrt{N}\log\left(\frac{N}{\varepsilon}\right)\right)$ 轮足以达到所需误差；每轮成本仍需另乘。这个纯解析界适用于一般规模，有限范围整数验证则把本题的上界进一步收紧。

返回 C 的收敛速度

C：同步值迭代的核心

```
h[x] = x; h[0] = 0
repeat:
    sum = aggregate_divisors_and_multiples(h)
    for x = 1, ..., N:
        g[x] = 1 + min(h[x-1], sum[x]/cnt[x])
    delta = max_x(h[x]-g[x])
    if max_x(h[x])*delta/(1+delta) <= tolerance:
        break
    swap(h, g)
```

等待动作每轮也必须重新计算。只比较旧的 $h(x)$ 与随机动作，会漏掉“先等待一步，再使用已经改善的后续策略”。

C：停止条件对应哪一份数组

区间宽度为

$$h(x)\frac{\delta}{1+\delta}.$$

一次迭代先用旧数组 h 算出新数组 $g = Th$，再由二者计算 δ。上述区间是对**旧数组** h 的保证。

若所有状态的宽度已经足够小，可直接输出这份 h；否则交换数组继续。不要交换后混用旧残差和另一份上界。

实现可用 `long double`，将阈值取到 10^{-8} 留出舍入余量。固定迭代轮数不提供这个精度判断。

返回 C 的残差证书

A：可选的循环层数组

每次转移跨越 $1, \ldots, A$ 层，因此只保留 $A+1$ 个槽，层 s 使用槽 $s \bmod (A+1)$。

处理当前层时，先记录到终点的候选答案，再完成所有出边转移，最后清空当前槽。

未来目标层都在 $s+1, \ldots, s+A$ 中，与当前槽不同；当前槽下一次使用于 $s+A+1$，因此不会覆盖尚未使用的状态。

空间降为 $O(An)$，时间界不变。层数上界及越界转移的检查仍然保留。

返回 A 的复杂度